固有値分布論の動向
– 最小固有値分布の精密計算と χ^2 近似 –

橋口　博樹 *　**宮崎　英子 ****　**杉山　高一 ****

**** 埼玉大学　** 中央大学**

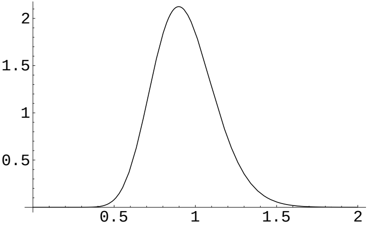
2009/12/5, 6

概要

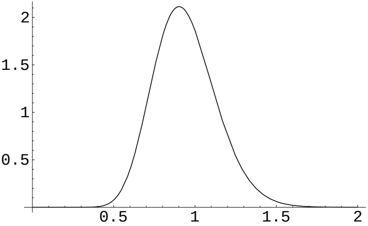
1. ダイジェスト（２つの成果）
2. 固有値分布論の広がり
3. ゾーナル多項式からジャック多項式へ
4. 最小固有値の精密計算と χ^2 近似

(ダイジェスト 1/2) χ^2 近似と精密分布の比較

$W \sim W_4\left(51, \mathrm{diag}(5^2, 4^2, 3^2, 1^2)\right)$ での最小固有値 $\ell_4/51$ の分布



(a) 精密分布



(b) 自由度 48 の χ^2 分布

$$\epsilon = \max_{0 \le x < \infty} \left| F_{\ell_m/n}(x) - F_{\chi^2_{n-m+1}}(x) \right| \approx 6.93 \times 10^{-16}$$

- $k = 92$ までの次数のゾーナル多項式が必要であり，1 次から 92 次までの分割の総数 $\sum_{j=1}^{92} \# P_4^j$ は約 1.67×10^6

ダイジェスト (2/2) 計算量

- m 変量，k 次までのジャック多項式を生成
- Koef and Edelman(2006) のジャック多項式生成の計算量

$$O\left(m \exp(2\pi\sqrt{2k/3})\right)$$

- Hashiguchi et al. (2000) のゾーナル多項式生成をジャック多項式の生成へ拡張し，計算量を導出

$$O\left(\frac{m^3}{k} \exp(2\pi\sqrt{2k/3})\right)$$

- $m^2 < k$ なら，Hashiguchi et al. (2000) の拡張版が効率的

固有値分布論のイントロダクション

固有値分布論の広がり

今後の動向，展望 (「ランダム行列の広がり」[永尾他 (2007)])

1. **量子カオス系のエネルギー準位統計と数論における L 関数のゼロ点分布**
2. **組合せ論とそれに関連した非平衡統計力学への応用**
3. **複雑ネットワークに関係した社会学や生物学への応用や通信理論などの工学的応用**

工学への応用

- Alex Grant (2002), Rayleigh Fading Multi-Antenna Channels, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 316–329
  - Sugiyama (1966), (1967), (1972)
- Lin et al. (2008), Ergodic Capacity of LTE Downlink Multiuser MIMO Systems, Proc. IEEE Communications Society, ICC 2008
  - Sugiyama (1967)
- RATNARAJAH et al. (2005), EIGENVALUES AND CONDITION NUMBERS OF COMPLEX RANDOM MATRICES, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL., 441–456
  - Sugiyama (1967), (1970), (1972)

はじめに

固有値分布論とゾーナル多項式

- ゾーナル多項式は，多変量正規母集団下で共分散行列の分布，特に固有値分布を記述する重要な多項式.
  - James (1960): 一般線形群と直交群に関する表現論を利用して導出.
  - 共分散行列の固有値関する多くの統計量が，ゾーナル多項式を使って導出 [James (1964), Constantine (1963)].
- しかし数値計算の困難性から，1960, 1970 年代での高次ゾーナル多項式の計算実現は，Sugiyama(1979) の２変数で 200 次の場合のみ
  - Sugiura(1990): ２変量の場合に最大固有値，最小固有値の分布の数値計算
  - １２変量，１２次までは，McLaren (1976) でプログラム実装
- ３変量以上のゾーナル多項式の数値計算は，Hashiguchi and Niki (1997)，Hashiguchi, Nakagawa and Niki (2000) で実装.
  - Hashgiuchi and Niki(2006): 最大，最小固有値の分布の数値計算

はじめに (2/2)

ゾーナル多項式からジャック多項式へ

- Jack(1970) は，James(1960) のゾーナル多項式を拡張しパラメータ α 付きの対称式を導入
  - $\alpha = 2$ のとき，ジャック多項式はゾーナル多項式
  - $\alpha = 1$ のとき，シュアー多項式 (複素ゾーナル多項式)
  - $\alpha = -1$ のとき，拡延対称式
  - Jack (1972) では，拡延対称式からベキ和多項式への相互変換方法が記述

    $\Leftarrow$ 中川，仁木 (1991) の多変量拡延対称式，多変量ベキ和多項式の相互変換アルゴリズムの一変量版
- Stanley(1989): ジャック多項式の組合せ論的な性質を解明

  $\Rightarrow$ Koef and Edelman(2006): ジャック多項式の計算方法，固有値分布の計算

Jack(1970): ジャック多項式の定義 (1/2)

- Y: $m \times m$ 対称行列
- $y_1, \ldots, y_m$: Y の固有値
- P_m^k: m 個以下の要素からなる k 次の分割全体

$$P_2^3 = \{(3), (2,1)\} \qquad [\text{注意 } (3,0) = (3)]$$

- $J_\kappa(Y;\alpha)$ for $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m) \in P_m^k$: ジャック多項式

$$J_{\kappa'}(Y;\alpha) = \alpha^m \frac{\partial^m}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_m} \left| I - t_1 Y^{\kappa_1} - t_2 Y^{\kappa_2} - \cdots - t_m Y^{\kappa_m} \right|^{-1/\alpha}$$

$$(t_1 = t_2 = \cdots = t_m = 0)$$

Stanley(1989): ジャック多項式の定義 (2/2)

任意の分割 κ に対して、以下の 3 つを満たす対称式（ジャック多項式）$J_\kappa = J_\kappa(Y;\alpha)$ が唯一存在する.

(P1) (直交性) $\kappa \neq \mu$ ならば, $\langle J_\kappa, J_\mu \rangle = 0$

(P2) (上三角性) $J_\kappa = \sum_\mu v_{\kappa\mu} m_\mu$ と書いたとき、 $\mu \leq \kappa$ でないならば, $v_{\kappa\mu} = 0$ である.

(P3) (正規性) $|\kappa| = m$、J_κ における $y_1 y_2 \cdots y_m$ の係数 $v_{\kappa(1^m)}$ は $m!$ に等しい

> $J_\kappa(Y;\alpha)$ をジャック多項式という.

(注意) $J_\kappa(Y;\alpha)$ は Y の固有値 $y_1 y_2 \cdots y_m$ の同次対称式.

ジャック多項式の性質 [Stanley(1989)]

- 漸化式 $[J_\kappa(y_1, \ldots, y_m; \alpha) = J_\kappa(Y; \alpha)]$

$$\boxed{J_\kappa(y_1, \ldots, y_m; \alpha) = \sum_{\mu \le \kappa} J_\mu(y_1, \ldots, y_{m-1}; \alpha)\, y_m^{|\kappa/\mu|}\, \beta_{\kappa\mu},}$$

- m 変数 k 次のジャック多項式は，それより小さい次数 $(k-1$ 以下)，少ない変数 $(m-1)$ のジャック多項式で計算できる
- ラマヌジャンの k 次分割に関する公式

$$\left|P_k^k\right| \sim \frac{1}{4k\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{2k/3}\right)$$

ジャック多項式生成の計算量: Koef and Edelman(2006)

- ジャック多項式 $\left\{J_\kappa(Y;\alpha) \mid \kappa \in P_m^k\right\}$ の計算量
  すべての分割のジャック多項式数 (s) × 一つのジャック多項式生成 (sm):

$$\boxed{s^2 m = O\left(m \exp\left(2\pi\sqrt{2k/3}\right)\right)}$$

ただし，s は k までの分割の総数（の近似）

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^{k}\left|P_m^j\right| \leq \sum_{j=1}^{k}\left|P_j^j\right| \sim k\frac{1}{4k\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{2k/3}\right) \\ &= O\left(\exp\left(\pi\sqrt{2k/3}\right)\right) \end{aligned}$$

基本対称式の定義

(目標)　ジャック多項式 $J_\kappa(Y;\alpha)$ を基本対称式で展開

- $e_1,\ldots,e_m$: 基本対称式

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ e_2 &= y_1\,y_2 + y_2\,y_3 + \cdots + y_{m-1}\,y_m, \ldots, \\ e_m &= y_1\,y_2\,\cdots\,y_m \end{aligned}$$

- $\mathcal{E}_\kappa(Y)$: 分割 $\kappa = (\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m) \in P_m^k$ の基本対称式

$$\mathcal{E}_\kappa(Y) = e_1^{\kappa_1-\kappa_2}\,e_2^{\kappa_2-\kappa_3}\cdots e_{m-1}^{\kappa_{m-1}-\kappa_m}\,e_m^{\kappa_m}$$

- $\mathcal{E}_\kappa(Y)$ の次数は k:

Y : 2 次　$\mathcal{E}_{(2,1)}(Y) = (y_1+y_2)^{2-1}(y_1y_2) = y_1^2\,y_2 + y_1\,y_2^2$

$q[\kappa,\mu]$ の漸化式とその項数

$$J_\kappa(Y;\alpha) = \sum_{\mu\in P_m^k} q[\kappa,\ \mu]\,\mathcal{E}_\mu(Y)$$

もし $\kappa > \mu$ かつ $d(\kappa;\alpha) \neq d(\mu;\alpha)$,

- $m = 2$ の場合，2 項間の漸化式

$$q[\kappa,\mu] = \frac{\alpha}{d(\mu;\alpha) - d(\kappa;\alpha)}\,(\nu_1+2)\,(\nu_1+1)\,q[\kappa,(\mu_1+1,\ \mu_2-1)]$$

- $m = 3$ の場合，4 項間の漸化式

$$\begin{aligned} q[\kappa,\mu] = \frac{\alpha}{d(\mu;\alpha) - d(\kappa;\alpha)}\{ & \\ (\nu_1+2)(\nu_1+1)\,q[\kappa,(\mu_1+1,\ \mu_2-1,\ \mu_3)] & \\ +\,(\nu_2+2)(\nu_2+1)\,q[\kappa,(\mu_1,\ \mu_2+1,\ \mu_3-1)] & \\ +\,3\,(\nu_1+1)(\nu_2+1)\,q[\kappa,(\mu_1+1,\ \mu_2,\ \mu_3-1)]\} & \end{aligned}$$

where $\nu_i = \mu_i - \mu_{i+1}\ (i = 1,\ 2,\ 3)$,

主定理

- ジャック多項式を基本対称式で展開したときの係数の漸化式の項数を T とする,

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{cases} 1 + \dfrac{t(t+1)(4t-1)}{6} & m = 2t \\ 1 + \dfrac{t(t+1)(4t+5)}{6} & m = 2t+1 \end{cases} \\
&\sim O\left(m^3\right)
\end{aligned}
$$

- ジャック多項式 $\left\{J_\kappa(Y;\alpha) \mid \kappa \in P_m^k\right\}$ の計算量

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \left(m^3 \left|P_m^j\right|\right) \times \left(\left|P_m^j\right|\right) &\leq k m^3 \left|P_m^k\right|^2 \\
&\sim O\left(\frac{m^3}{k} \exp\left(\pi \sqrt{2k/3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

計算量比較

- m 変量，k 次までのジャック多項式を生成
- Koef and Edelman(2006) のジャック多項式生成の計算量

$$O\left(m\exp(2\pi\sqrt{2k/3})\right)$$

- Hashiguchi et al. (2000) のゾーナル多項式生成をジャック多項式の生成へ拡張し，計算量を導出

$$O\left(\frac{m^3}{k}\exp(2\pi\sqrt{2k/3})\right)$$

- $m^2 < k$ なら，Hashiguchi et al. (2000) の拡張版が効率的

最小固有値分布の精密計算と χ^2 近似

- 最小固有値分布の精密計算
- χ^2 近似

もう一つのジャック多項式

$$(\mathrm{tr}\,Y)^k = \sum_{\kappa \in P_m^k} C_\kappa^{(\alpha)}(Y)$$

$J_\kappa(Y;\alpha)$ と $C_\kappa^{(\alpha)}(Y)$ の関係

$$C_\kappa^{(\alpha)}(Y) = \frac{\alpha^{|\kappa|}\ (|\kappa|)!}{j_\kappa} J_\kappa(Y;\alpha)$$

ただし,

$$j_\kappa = \prod_{(i,j)\in\kappa} h_\kappa^*(i,j)\ h_*^\kappa(i,j)$$

$h_\kappa^*(i,j) = k'_j - i + \alpha(k_i - j + 1)$, $h_*^\kappa(i,j) = k'_j - i + 1 + \alpha(k_i - j)$ は
それぞれ the upper と lower hook length at $(i,j) \in \kappa$ である.

最小固有値分布の数値計算

	$\alpha = 2$ $\Longrightarrow$	zonal polynomial	$W_m(n, \Sigma)$ での最大，最小固有値の分布計算
Jack function: $C_\kappa^{(\alpha)}$			
	$\alpha = 1$ $\Longrightarrow$	complex zonal polynomial	$CW_m(n, \Sigma)$ での最小固有値の分布計算

- $W_m(n, \Sigma)$ での最小固有値の分布計算とその限界
- $CW_m(n, \Sigma)$ での最小固有値の分布計算とその限界

最小固有値の分布の χ^2 近似

Khatri (1972): ウィシャート行列の最小固有値分布

- $W \sim W_m(n, \Sigma)$ $(n \geq m)$.
- ℓ_m: ウィシャート行列 W の最小固有値
- $j = (n - m - 1)/2$: 非負整数

$$\Pr[\ell_m < x] = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\right)\sum_{k=0}^{jm}\frac{x^k}{2^k k!}\sum_{\kappa}{}^{*} C_\kappa(\Sigma^{-1})$$

- ただし，和の記号 $\sum_{\kappa}^{*}$ は,

$$\left\{\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \in P_m^k \mid \kappa_1 \leq j\right\}$$

の条件 ($\kappa_1 \leq j$) を満たす分割にわたって和を取る.

Ratnarajah et al. (2005): 複素ウィシャートの最小固有値分布

- $\widetilde{W} \sim \mathrm{CW}_m(n, \Sigma)$ $(n \geq m)$.
- $\tilde{\ell}_m$: $\widetilde{W}$ の最小固有値

$$\Pr[\tilde{\ell}_m < x] = 1 - \exp\left(-x \operatorname{tr} \Sigma^{-1}\right) \sum_{k=0}^{m(n-m)} \frac{x^k}{k!} \sum_{\kappa}{}^{*} \widetilde{C}_\kappa(\Sigma^{-1}),$$

- ただし，$\widetilde{C}_\kappa(Y) = C_\kappa^{(1)}(Y)$. $\sum_{\kappa}^{*}$ は

$$\left\{\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \in P_m^k \mid \kappa_1 \leq n - m\right\}.$$

の条件下で和をとる.

最小固有値 $\ell_4, \tilde{\ell}_4$ の密度関数

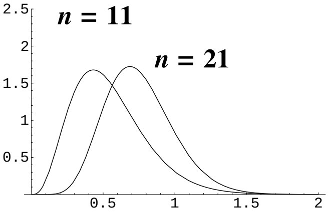


Figure: $W_4(n, \mathrm{diag}(1, 2, 3, 4))$

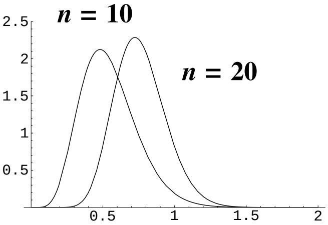


Figure: $CW_4(n, \mathrm{diag}(1, 2, 3, 4))$

数値計算の限界に関する考察 (1/2)

分割の最大次数

実数: $\dfrac{m(n-m-1)}{2}$ 　　複素: $m(n-m)$

$$\Pr[\ell_m < x] = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\right)\sum_{k=0}^{(n-m-1)/2\ m}\frac{x^k}{2^k k!}\sum_{\kappa}{}^{*} C_\kappa(\Sigma^{-1})$$

$$\Pr[\tilde{\ell}_4 < x] = 1 - \exp\left(-x\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\right)\sum_{k=0}^{m(n-m)}\frac{x^k}{k!}\sum_{\kappa}{}^{*} \widetilde{C}_\kappa(\Sigma^{-1}),$$

数値計算の限界に関する考察 (2/2)

$k = 100$

	$\lvert P_m^k \rvert$	$t = \lvert P_m^k \rvert (\lvert P_m^k \rvert + 1)/2$	(approx.)
$m = 2$	51	1326	(1.3×10^3)
$m = 3$	884	391170	(3.9×10^5)
$m = 4$	8039	32300703	(3.2×10^7)

$t \leq 10^5$

		Real	Complex
	k	$m(n - m - 1)/2 \leq k$	$m(n - m) \leq k$
$m = 2$	$k \geq 100$	$n \geq 103$	$n \geq 52$
$m = 3$	$k \leq 70$	$n \leq 50$	$n \leq 26$
$m = 4$	$k \leq 35$	$n \leq 23$	$n \leq 12$

最小固有値分布の精密計算と χ^2 近似

- **最小固有値分布の精密計算**
- **χ^2 近似**

最小固有値分布の χ^2 近似

$W \sim W_m(n, \Sigma),\ \Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

1. $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \cdots + \lambda_m^{-1})$ とおく．このとき ℓ_m の密度関数は，(2) 式で近似できる．

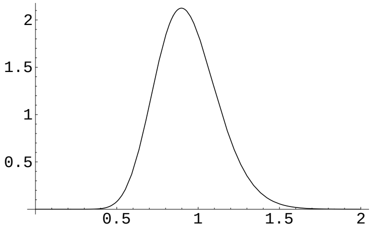
$$f(\ell_m) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}(n-m+1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-m+1)\right)} \ell_m^{\frac{1}{2}(n-m+1)-1} e^{-\lambda \ell_m}. \tag{2}$$

2. ℓ_m/λ_m の分布は，λ_m が他の固有値と離れ n が十分大きい場合，自由度 $n-m+1$ の χ^2 分布に従う．

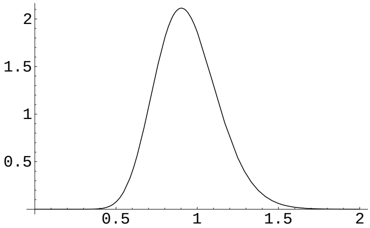
$$\boxed{f(\ell_m) = \frac{1}{(2\lambda_m)^{\frac{1}{2}(n-m+1)}} \ell_m^{\frac{1}{2}(n-m+1)-1} \exp\left[-\frac{\ell_m}{2\lambda_m}\right].} \tag{3}$$

χ^2 近似と精密分布の比較

$W \sim W_4\left(51, \mathrm{diag}(5^2, 4^2, 3^2, 1^2)\right)$ での最小固有値 $\ell_4/51$ の分布



(a) 精密分布



(b) 自由度 48 の χ^2 分布

$$\epsilon = \max_{0 \le x < \infty} \left| F_{\ell_m/n}(x) - F_{\chi^2_{n-m+1}}(x) \right| \approx 6.93 \times 10^{-16}$$

- $k = 92$ までの次数のゾーナル多項式が必要であり，1 次から 92 次までの分割の総数 $\sum_{j=1}^{92} \# P_4^j$ は約 1.67×10^6

最小固有値分布の χ^2 近似

$W \sim W_4(51, \mathrm{diag}(5^2, 4^2, 3^2, 1))$ の最小固有値 $\ell_4/51$

	パーセント点		累積確率
α	精密分布 (x_α)	χ^2_{48}	$F_{\chi^2_{48}}(x_\alpha)$
0.99	1.437	1.444	0.989
0.95	1.271	1.277	0.947
0.05	0.645	0.648	0.04784
0.01	0.549	0.552	0.00947

χ^2 近似は 99%，95%，5%，1% パーセント点で 3 桁の精度があることが分かる.

χ^2 近似とモンテカルロシミュレーション

シミュレーション条件

- $n = 100$
- $m = 4,\ \ \Sigma = \mathrm{diag}(4^2, 3^2, 1.5^2, 1),\ \ \mathrm{diag}(4^2, 3^2, 2^2, 1),\ \mathrm{diag}(5^2, 4^2, 3^2, 1)$
- x^*_α : シミュレーションでの 100α パーセント点 (10^6 個 の並び替え)
- $F_{\chi^2_{n-m+1}}(x^*_\alpha)$: χ^2_{n-m+1} での累積確率

シミュレーション回数が 10^6 であるので，その精度は 3 桁程度である．χ^2_{97} とシミュレーション結果が 2, 3 桁合っている．

最小固有値分布の χ^2 近似シミュレーション結果 (1/4)

Table: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点 (x^*_α) と χ^2_{97} との比較 (1)

$W \sim W_4(100, \Sigma)$ での W の最小固有値 ℓ_4 のパーセント点

Σ	$\mathrm{diag}(5^2, 4^2, 3^2, 1)$		$\mathrm{diag}(4^2, 3^2, 2^2, 1)$	
α	x^*_α	$F_{\chi^2_{97}}(x^*_\alpha/n)$	x^*_α	$F_{\chi^2_{97}}(x^*_\alpha/n)$
0.99	132.182	0.9898	131.772	0.9891
0.975	125.962	0.9743	125.569	0.9729
0.95	120.794	0.9487	120.419	0.9462
0.90	115.019	0.8976	114.667	0.8936
0.50	96.130	0.4941	95.846	0.4859
0.10	79.460	0.0975	79.213	0.0940
0.05	75.129	0.0486	74.876	0.0465
0.02	71.518	0.0243	71.283	0.0232
0.01	67.427	0.0096	67.208	0.0091

x^*_α: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点

最小固有値分布の χ^2 近似シミュレーション結果 (2/4)

Table: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点 (x^*_α) と χ^2_{97} との比較 (1)

$W \sim W_4(100, \Sigma)$ での W の最小固有値 ℓ_4 のパーセント点

Σ	$\mathrm{diag}(4^2, 3^2, 2^2, 1)$		$\mathrm{diag}(4^2, 3^2, 1.5^2, 1)$	
α	x^*_α	$F_{\chi^2_{97}}(x^*_\alpha/n)$	x^*_α	$F_{\chi^2_{97}}(x^*_\alpha/n)$
0.99	131.772	0.9891	130.922	0.9876
0.975	125.569	0.9729	124.803	0.9698
0.95	120.419	0.9462	119.719	0.9413
0.90	114.667	0.8936	114.032	0.8859
0.50	95.846	0.4859	95.359	0.4719
0.10	79.213	0.0940	78.863	0.0893
0.05	74.876	0.0465	74.563	0.0439
0.02	71.283	0.0232	70.971	0.0217
0.01	67.208	0.0091	66.943	0.0085

x^*_α: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点

最小固有値分布の χ^2 近似シミュレーション結果 (3/4)

Table: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点 (x^*_α) と χ^2_{91} との比較 (2)

$W \sim W_{10}(100, \Sigma)$ での W の最小固有値 ℓ_{10} のパーセント点

	$\lambda_1 = 10^2,\ \lambda_2 = 9^2,\ \lambda_3 = 8^2,\ \lambda_4 = 7^2,\ \lambda_5 = 6^2,\ \lambda_6 = 5^2$			
	$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_6, 4.5^2, 4^2, 3^2, 1)$		$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$	
100α	x^*_α	$F_{\chi^2_{91}}(x^*_\alpha/n)$	x^*_α	$F_{\chi^2_{91}}(x^*_\alpha/n)$
0.99	125.007	0.9895	124.486	0.9886
0.975	118.962	0.9738	118.505	0.9720
0.95	113.921	0.9476	113.505	0.9447
0.90	108.318	0.8959	107.924	0.8912
0.50	90.017	0.4905	89.699	0.4811
0.10	73.909	0.0957	73.675	0.0924
0.05	69.731	0.0475	69.507	0.0456
0.02	66.225	0.0235	66.014	0.0225
0.01	62.322	0.0093	62.098	0.0088

x^*_α: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点

最小固有値分布の χ^2 近似シミュレーション結果 (4/4)

Table: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点 (x^*_α) と χ^2_{91} との比較 (2)

$W \sim W_{10}(100, \Sigma)$ での W の最小固有値 ℓ_{10} のパーセント点

	$\lambda_1 = 10^2,\ \lambda_2 = 9^2,\ \lambda_3 = 8^2,\ \lambda_4 = 7^2,\ \lambda_5 = 6^2,\ \lambda_6 = 5^2$			
	$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$		$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_6, 4^2, 3^2, 1.5^2, 1)$	
100α	x^*_α	$F_{\chi^2_{91}}(x^*_\alpha/n)$	x^*_α	$F_{\chi^2_{91}}(x^*_\alpha/n)$
0.99	124.486	0.9886	123.644	0.9870
0.975	118.505	0.9720	117.755	0.9689
0.95	113.505	0.9447	112.825	0.9397
0.90	107.924	0.8912	107.289	0.8831
0.50	89.699	0.4811	89.222	0.4668
0.10	73.675	0.0924	73.318	0.0874
0.05	69.507	0.0456	69.185	0.0429
0.02	66.014	0.0225	65.739	0.0211
0.01	62.098	0.0088	61.901	0.0083

x^*_α: 10^6 回のシミュレーションでのパーセント点

まとめ

1. Hashiguchi, Nakagawa and Niki (2000) の real zonal polynomials の計算方法を Jack functions の場合へ拡張し，complex zonal polynomials を 2 変数から 4 変数で求めた.
2. Jack functions を基本対称式で展開するための計算量を求めた.

$$O\left(\frac{m^3}{k}\exp(2\pi\sqrt{2k/3})\right)$$

    - Koef and Edelman (2006) の方法と比べ，$m^2 < k$ なら，Hashiguchi et al. (2000) の拡張版が効率的
3. 最小固有値分布の精密計算を行った．また分割の総数により数値計算の限界について考察を行った.
    - 最大固有値の分布計算には一般化超幾何関数の計算が必要となるので，数式処理言語での開発を今後行う予定である.
4. 最小固有値分布の χ^2 を求め，精密分布，シミュレーションとの比較を行った.

Conclusions

本研究では次のことを示した.

1. Hashiguchi, Nakagawa and Niki (1998) の real zonal polynomials の計算方法を Jack functions の場合へ拡張し, complex zonal polynomials を 2 変数から 4 変数で求めた. 分割の次数では 100 以下である.
2. Jack functions を基本対称式で展開するための漸化式の項数が, $O(m^3)$ であることを示した.
   - monomial symmetric functions での展開では, 漸化式の項数は $O(k^2)$ である.
   - Jack 多項式生成のための計算量を見積もり, Koef and Edelman (2006) と比較する必要がある.
3. 固有値分布の数値計算を行った. 2 変数で実数のウィシャート行列では 100 次以上の自由度のものを計算できるが, 4 変数では 30 程度が計算可能であることが分かった. 複素版では実数版の半分で 4 変数で 20 程度である. 4 変数で自由度 20 の場合に 68 次までの分割が必要で実際に計算できていることも確認した.
   - 最大固有値の分布計算には一般化超幾何関数の計算が必要となるので, 数式処理言語での開発を今後行う予定である.