実験計画法入門

第４章　１因子実験（ラテン方格法）

ラテン方格 … 一般に n 行、n 列からなる方格に、n 種類の数字が、
どの行、どの列にも１回ずつ現れるように並べられた方格。

ラテン方格法 … ２種類のブロック因子をとりあげた実験配置法

ラテン方格法について説明するために、例題 3.1 の乱塊法の実験をとりあげる。

日＼順序	1	2	3	4
第 1 日	A_2	A_1	A_3	A_4
第 2 日	A_1	A_3	A_2	A_4
第 3 日	A_1	A_2	A_3	A_4
第 4 日	A_3	A_4	A_2	A_1
第 5 日	A_3	A_2	A_4	A_1

これをみると、日の影響は各水準に対して平等であるが、1 日のなかで行う実験の順序に関しては平等ではない。例えば、A_4 水準は５日間のうち３日間が最後に実験されている。もし一日のなかでの実験順序が実験結果に影響を与えるならば、これでは不公平である。このことから、1 日のなかでの実験順序に関しても平等にしようとする実験法がラテン方格法である。

日＼順序	1	2	3	4
第 1 日	A_1	A_2	A_3	A_4
第 2 日	A_2	A_1	A_4	A_3
第 3 日	A_3	A_4	A_1	A_2
第 4 日	A_4	A_3	A_2	A_1

表 4.1　ラテン方格法での実験順序

ラテン方格法は 2 種類のブロック因子をとりあげた実験配置法だと説明したが、この実験では“ 日 ”と“ 順序 ”が 2 種類のブロック因子としてとりあげられている。

注意

ラテン方格法では、２種類のブロックそれぞれのブロック数は、比較したい水準の数と一致しなければならない。今の例では、比較したい水準は A_1, A_2, A_3, A_4 の４つであるから、“日”“順序”という２種類のブロックのブロック数はそれぞれ４になっている。

例題 4.1

自動車タイヤの４つの銘柄 A_1，A_2，A_3，A_4 に対し摩耗度の比較をしたい。１つの車に１つの銘柄のタイヤを取り付けて走らせることにすれば、A_1 を取り付けた車、A_2 を取り付けた車、A_3 を取り付けた車、A_4 を取り付けた車の計４台を、全く同じ条件で走らせなければいけない。これは、車のばらつき、運転者の癖、交通事情などを考えるとほとんど不可能に近い。そこで１台の車に４種類タイヤを取り付けることができるので、“車”をブロックにする。また、前輪左、前輪右、後輪左、後輪右のどこに取り付けるかにより摩耗度は変わるかもしれないので、“取り付け位置”もブロックとしてとりあげたラテン方格法で実験するのが一番よいと考えられる。

4×4 のラテン方格をランダムに１つ選びだし、そこに今の例で取り上げた水準を割り当てると、実験配置は表 4.2 のようになる。

車 ＼ 取付け位置	前左	前右	後左	後右
1	A_4	A_1	A_3	A_2
2	A_3	A_4	A_2	A_1
3	A_2	A_3	A_1	A_4
4	A_1	A_2	A_4	A_3

表 4.2　タイヤの比較試験（ラテン方格法）

適当に４台の車を用意し、各車に表 4.2 に従って A_1，A_2，A_3，A_4 のタイヤを取り付ける。そしてこの４台の車をそれぞれ勝手に走らせ、適当な時期にタイヤの摩耗度を測定すればよい。この場合、用意する４台の車は同じである必要はなく、４人の運転者も同じ運転者である必要はなく、４台の車の走る場所、走り方も全く勝手でよい。

一定時間走行後の各タイヤの摩耗量を測定したデータが表 4.3 である。

車＼取付け位置	前左	前右	後左	後右
1	10	13	7	3
2	8	12	6	12
3	13	9	16	16
4	17	13	13	9

表 4.3　タイヤの摩耗量（mm）

実験データの解析

因子 A の a 個の水準 (処理) $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_a$ の比較実験を、$a \times a$ のラテン方格を用いて実験する。2 種類のブロックを行 (R) と列 (C) で表す。

さらに

$$x_{\cdot\cdot(k)} = \text{処理 } A_k \text{ で実験されているデータの和}$$

$$\bar{x}_{\cdot\cdot(k)} = \frac{1}{a} x_{\cdot\cdot(k)} = \text{処理 } A_k \text{ で実験されているデータの平均値}$$

と定義する。

R \ C	C_1	C_2	$\cdots$	C_j	$\cdots$	C_a	和	平均
R_1	x_{11}	x_{21}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1a}	$x_{1\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
R_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2a}	$x_{2\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_i	x_{i1}	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{ia}	$x_{i\cdot}$	$\bar{x}_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_a	x_{a1}	x_{a2}	$\cdots$	x_{aj}	$\cdots$	x_{aa}	$x_{a\cdot}$	$\bar{x}_{a\cdot}$
和	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$\cdots$	$x_{\cdot i}$	$\cdots$	$x_{\cdot a}$	$x_{\cdot\cdot}$	
平均	$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\bar{x}_{\cdot i}$	$\cdots$	$\bar{x}_{\cdot a}$		$\bar{x}_{\cdot\cdot}$

表 4.4 ラテン方格法による実験データ

データの構造模型

x_{ij} の構造模型を次のように仮定する。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ij} \qquad (4.1)$$

μ : 一般平均

α_i : i 行の効果 $\quad \sum_i^a \alpha_i = 0$

β_j : j 列の効果 $\quad \sum_j^a \beta_j = 0$

γ_k : 処理 A_k の効果 $\sum_k^a \gamma_k = 0$

e_{ij} : 誤差、正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ に従う

$$\boxed{\text{実験目的：因子 } A \text{ の水準間の比較}}$$

このために仮説

$$H_0 \ : \ \gamma_1 = \gamma_2 = \ \cdots \ = \gamma_a = 0$$

の検定をする。

分散分析

(4.1) 式より、データに変動を与える要因は行の効果 (α_i)、列の効果 (β_j)、因子 A の効果 (γ_k)、誤差 (e_{ij}) の 4 つである。そこで、総平方和 S_T を行間平方和 S_R、列間平方和 S_C、A 間平方和 S_A、誤差平方和 S_e の 4 つに分解する。

$$\text{総平方和 } S_T = \sum_i^a \sum_j^a (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$$

$$\text{行間平方和 } S_R = a \sum_i^a (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$$

$$\text{列間平方和 } S_C = a \sum_j^a (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$$

$$A \text{ 間平方和 } S_A = a \sum_j^a (\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}_{..})^2$$

$$\text{誤差平方和 } S_e = S_T - S_R - S_c - S_A$$

分散分析表は表 4.5 のようになる。

変動因	平方和	自由度	平均平方	F_0	平均平方の期待値
行間 (R)	S_R	$\phi_R = a-1$	$V_R = S_R/\phi_R$	V_R/V_e	$\sigma^2 + a\sigma_R^2$
列間 (C)	S_C	$\phi_C = a-1$	$V_C = S_C/\phi_C$	V_C/V_e	$\sigma^2 + a\sigma_C^2$
A 間	S_A	$\phi_A = a-1$	$V_A = S_A/\phi_A$	V_A/V_e	$\sigma^2 + a\sigma_A^2$
誤差	S_e	$\phi_e = (a-1)(a-2)$	$V_e = S_e/\phi_e$		σ^2
総	S_T	$\phi_T = a^2-1$			

表 4.5 ラテン方格法の分散分析表

ただし

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{a-1}\sum_i^a \alpha_i^2,\ \sigma_C^2 = \frac{1}{a-1}\sum_j^a \beta_j^2,\ \sigma_A^2 = \frac{1}{a-1}\sum_k^a \gamma_k^2$$

最適水準の決定

もし因子 A が有意ならば、A の最適水準を決めるために A_k 水準の効果の推定をする。

点推定 : A_k 水準でのデータの平均値 $= \bar{x}_{\cdot\cdot(k)}$

信頼区間（95 %） : $\bar{x}_{\cdot\cdot(k)} \pm t((a-1)(a-2),\ 0.05)\sqrt{\dfrac{V_e}{a}}$

グレコ・ラテン方格法

まず、２つのラテン方格を用意する。それが表 4.6 であったとする。

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

表 4.6　２つのラテン方格

この２つのラテン方格を重ね合わせると表 4.7 のような方格が得られる。

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\gamma$	$A\delta$	$D\alpha$	$C\beta$
$C\delta$	$D\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
$D\beta$	$C\alpha$	$B\delta$	$A\gamma$

表 4.7　グレコ・ラテン方格

この重ね合わせて得られた方格がグレコ・ラテン方格である。
グレコ・ラテン方格は次の２つの性質を持っている。

(1). 各行、各列に、ラテン文字とギリシャ文字がそれぞれ１回ずつ現れている。

(2). ラテン文字とギリシャ文字との可能な組合わせ（$4 \times 4 = 16$ 通り）が方格内に１回ずつ現れている。

２つのラテン方格を重ね合わせたとき、性質 (2) をもつならば、この２つのラテン方格は互いに直交するという。