実験計画法入門

第５章　実験配置法の比較

この章では今まで取り上げてきた３つの実験配置法（完全無作為化法、乱塊法、ラテン方格法）についての優劣を考察する。

ここで重要なのは

完全無作為化法、乱塊法、ラテン方格法の３つの実験配置法は、
１因子実験に限らず、原則としてすべての実験において考えられるものである。

ということである。

例題 5.1

２つの因子 A、B をとりあげた実験を考える。因子 A を２水準 A_1, A_2、因子 B を３水準 B_1, B_2, B_3 にとると、可能な水準組み合わせは A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3 の６通りである。各水準組み合わせを n 回ずつ実験することにするとき、次の３つの実験配置法が考えられる。

(1). 完全無作為化法による実験

各水準組み合わせでの繰り返し数 n を $n=2$ とすると、合計１２回の実験をすることになるが、この１２回の実験すべてをランダムな順序でやる。（図 5.1）

(2). 乱塊法による実験

$n=2$ とすると、ブロックの水準を２水準にとることになる。したがって、まず６つすべての水準組み合わせをランダムな順序で実験し、それが終わってからまた、６つのすべての水準組み合わせをランダムな順序で実験する。(図 5.2)

実験順序	水準組み合わせ
1	A_1B_2
2	A_1B_3
3	A_1B_3
4	A_1B_2
5	A_2B_1
6	A_1B_1

実験順序	水準組み合わせ
7	A_1B_1
8	A_2B_3
9	A_2B_2
10	A_2B_3
11	A_2B_1
12	A_2B_2

図 5.1 完全無作為化法による実験

実験順序	水準組み合わせ
1	A_1B_3
2	A_2B_1
3	A_2B_3
4	A_1B_1
5	A_1B_2
6	A_2B_2

実験順序	水準組み合わせ
1	A_2B_2
2	A_1B_3
3	A_2B_1
4	A_1B_2
5	A_2B_3
6	A_1B_1

図 5.2 乱塊法による実験

(3). ラテン方格法による実験

ラテン方格法による実験は2種類のブロック因子をとりあげるのであるが、その各水準数は比較したい処理の数（今の場合は６）に等しくなければいけないという制約がある。このことから $n = 6$ にしなければいけない。そして 6×6 のラテン方格に基づいて合計 36 回の実験をすることになる。実際には、２種類のブロックの水準数についての制約とか、合計３６回もの実験が要求されるということから、ラテン方格法は適用不可能だと考えられる。

このように、３つの配置法のうち、ラテン方格法は制約がきびしく適用不可能な場合が多い。したがって実際には、完全無作為化法、乱塊法のいずれの配置法を採用するかということが問題となる。したがってこのあとからは完全無作為化法と乱塊法の優劣を考える。

分散分析検定の精度

実験データの解析の際、分散分析表を作成し、平均平方の比の値を F 分布のパーセント点と比べることにより仮説の検定をしている。このような分散分析表による仮説の検定を分散分析検定と呼ぶ。

仮説検定における誤りは２種類ある。１つは、仮説が真であるにもかかわらず仮説を棄却する誤りであり、これを第一種の誤りと呼ぶ。もう１つは、仮説が誤っているにもかかわらず仮説を棄却しない誤りであり、これを第２種の誤りと呼ぶ。

仮説検定における判定は“仮説を棄却する”と“仮説を棄却しない（仮説を採択する）”の２つであって、“仮説を棄却する”という判定をしたときには第１種の誤りをおかしている可能性があり、“仮説を棄却しない”という判定をしたときには第２種の誤りをおかしている可能性があることになる。この２つの誤りは、もちろん両方とも小さいほうが望ましいのであるが、一方を小さくしようと思えば、一方が大きくなるといった類のものであって、両方を同時に小さくすることはむずかしい。

われわれが普通行う有意水準５％の検定は、この第１種の誤り、第２種の誤りの観点からいうと、第１種の誤りをおかす確率を５％以下にして判断するということになっている。つまり、検定では第１種の誤りをおかす確率をすべて５％と一定にしているのである。したがって、検定の精度は第２種の誤りをおかす確率で表すことができ、第２種の誤りをおかす確率が小さいほど精度のよい検定ということになる。

分散分析検定の精度については、次の２つの性質がある。

性質１　誤差分散が小さいほうが検定の精度がよい。もっと正確に言うと F 検定における分母の要因の平均平方の期待値が小さいほど検定の精度がよい。

性質２　誤差分散推定の自由度が大きいほど検定の精度がよい。もっと正確にいうと、F 検定における分母の要因の自由度が大きいほど検定の精度がよい。

この２つの性質の要求は、一般に、矛盾をするという関係にある。つまり、性質１の立場から検定の精度をよくしようと思えば、性質２の立場からは精度が悪くなり、逆に、性質２の立場から検定の精度をよくしようと思えば、性質１の立場からは精度は悪くなる。したがって、この２つの面からの要求の兼合いが問題となる。

完全無作為化法と乱塊法の効率の比較

完全無作為化法はすべての実験をランダムな順序で行い、実験の場の変動は、すべて実験誤差の中に入れてしまうというやり方であるから、完全無作為化法で実験をしたときの誤差分散は一般に大きい値となる。これに対し、乱塊法は、実験の場の変動原因のうち大きいと思われるものをブロック因子としてとりあげているので、実験誤差は、完全無作為化法を適用した場合よりも小さいことが期待される。

実験誤差が小さいということは実験の精度がよいことだと直感的な解釈をくだすと、この３つの実験配置法の中ではラテン方格法が一番よくて、次が乱塊法ということになる。しかし、これは１つの直感的な見方であり、データ解析の理論すなわち統計学の立場から、この３つの実験配置法の優劣を調べてみる。ただし、前述の通り、ラテン方格法はこの比較から除外する。

データ解析のときに使われる主要な手法は検定であるから、この検定の精度という立場から、完全無作為化法と乱塊法の優劣を比較する。

因子 A の a 個の水準 $A_1, A_2, \cdots, A_a$ の間の比較をする１因子実験をとりあげ、この実験を、繰り返し数 n とする完全無作為化法で行った場合と、ブロックの数を n とする乱塊法で行った場合との２つを考える。ともに総実験回数は an となり同じである。各々の場合の分散分析表は表 5.1、表 5.2 のようになる。

変動因	自由度	平均平方の期待値
A 間	$a-1$	$\sigma_c^2 + n\sigma_A^2$
誤差	$a(n-1)$	σ_c^2
総	$an-1)$	

表 5.1　完全無作為化法

変動因	自由度	平均平方の期待値
A 間	$a-1$	$\sigma_r^2 + n\sigma_A^2$
ブロック間	$n-1$	$\sigma_r^2 + a\sigma_B^2$
誤差	$(a-1)(n-1)$	σ_r^2
総	$an-1$	

表 5.2　乱塊法

実験の目的は因子 A の推測であるから、A の検定の精度を比較して優劣を決めてよいであろう。まず、誤差分散（F 検定の分母の要因の平均平方の期待値）の大きさという立場から比べてみる。完全無作為化法の場合の誤差分散は σ_c^2 であり、乱塊法の場合の誤差分散は σ_r^2 であり、配置法の性質から $\sigma_c^2 > \sigma_r^2$ と考えてよい。したがって、誤差分散の大きさという立場からは乱塊法のほうがよい。

次に、誤差分散推定の自由度（F 検定の分母の要因の自由度）の大きさという立場から比べてみる。完全無作為化法の場合の誤差分散推定の自由度は $a(n-1)$ であり、乱塊法の場合の誤差分散推定の自由度は $(a-1)(n-1)$ である。この自由度は大きいほどよいのであるから、誤差分散推定の自由度という立場からは完全無作為化法のほうがよい。

このように完全無作為化法、乱塊法にはそれぞれ一長一短があり、一般論として、これ以上優劣を議論することはできない。なぜならば、

(1). もし $\sigma_c^2 \fallingdotseq \sigma_r^2$ ならば、誤差分散の大きさという立場からは完全無作為化法のほうがよいことになり、結局総合して、完全無作為化法のほうがよいということになる。

(2). もし σ_r^2 が σ_c^2 に比べてかなり小さいならば、乱塊法では誤差分散推定の自由度が減るけれども、誤差分散がかなり小さくなることから、総合すれば乱塊法のほうがよいということになる。

しかしながら、誤差分散推定の自由度と検定の精度については、自由度が10 以上ぐらいあれば、それ以上自由度が増しても検定の精度はさほどよくならないという性質がある。このことから、実験にブロック因子を入れるかどうか、すなわち乱塊法と完全無作為化法のいずれを使うかについては、乱塊法で誤差分散推定の自由度が 10 以上確保できるならば、完全無作為化法よりも乱塊法を使ったほうがよいということを目安にすればよい。