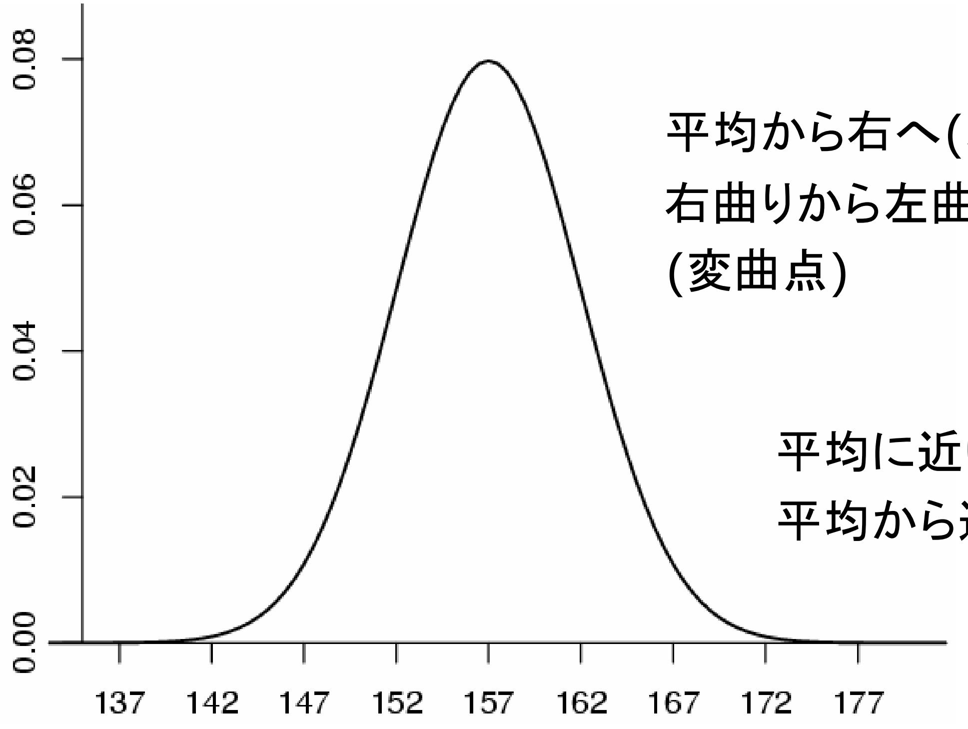
正規分布

正規分布

- 平均157，分散25の正規分布

平均157.0を中心に左右対称なつりがね型



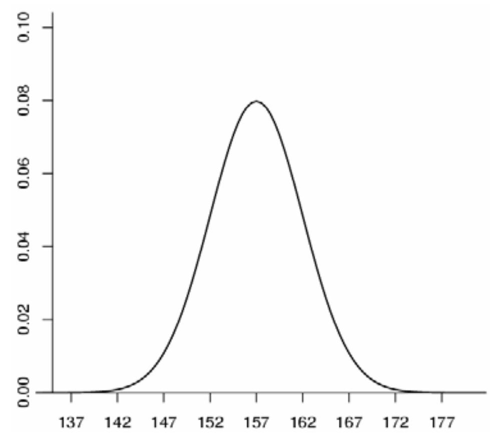
平均から右へ(左へ)5.0のところで右曲りから左曲りに変わっている(変曲点)

平均に近いほど高く
平均から遠いほど低い

標準偏差と分散

正規分布

- 生物学的な測定値に見られる
  - 例：身長、座高、腕の長さ
- 測定誤差にもあてはまる



標準偏差と分散

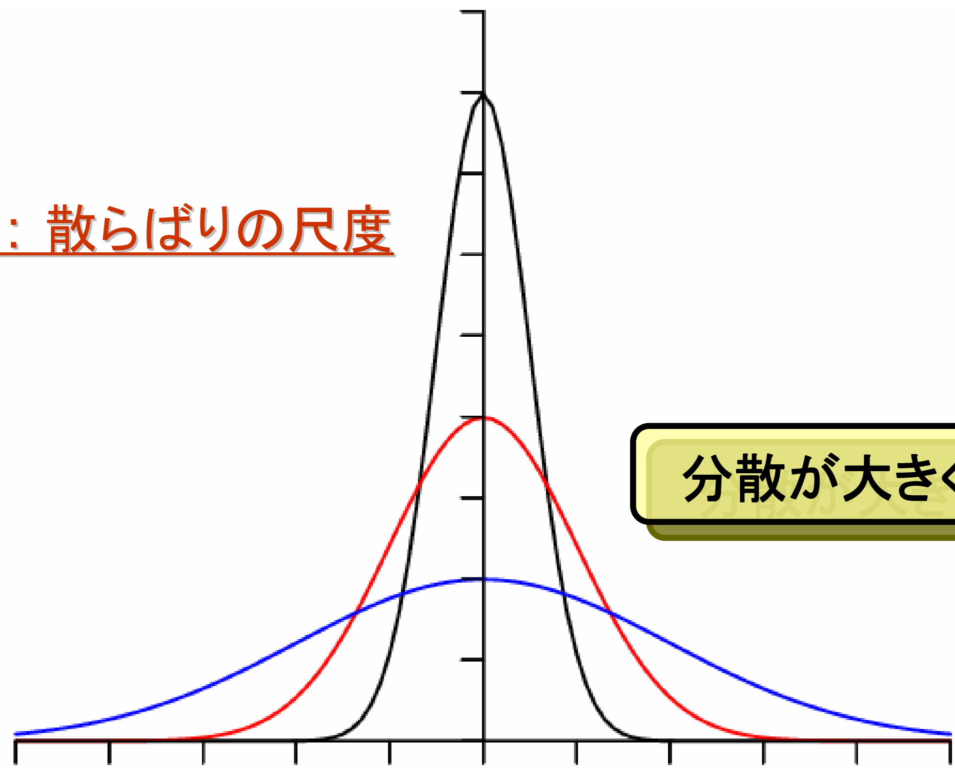
- 標準偏差：平均から変曲点までの距離（σ で表す）
- 分散：標準偏差の平方（σ^2 で表す）
- 標準偏差・分散：散らばりの尺度

分散

- 平均157，σ＝2.5，5，10の場合の正規分布

分散が小さいと平均の周りに集中

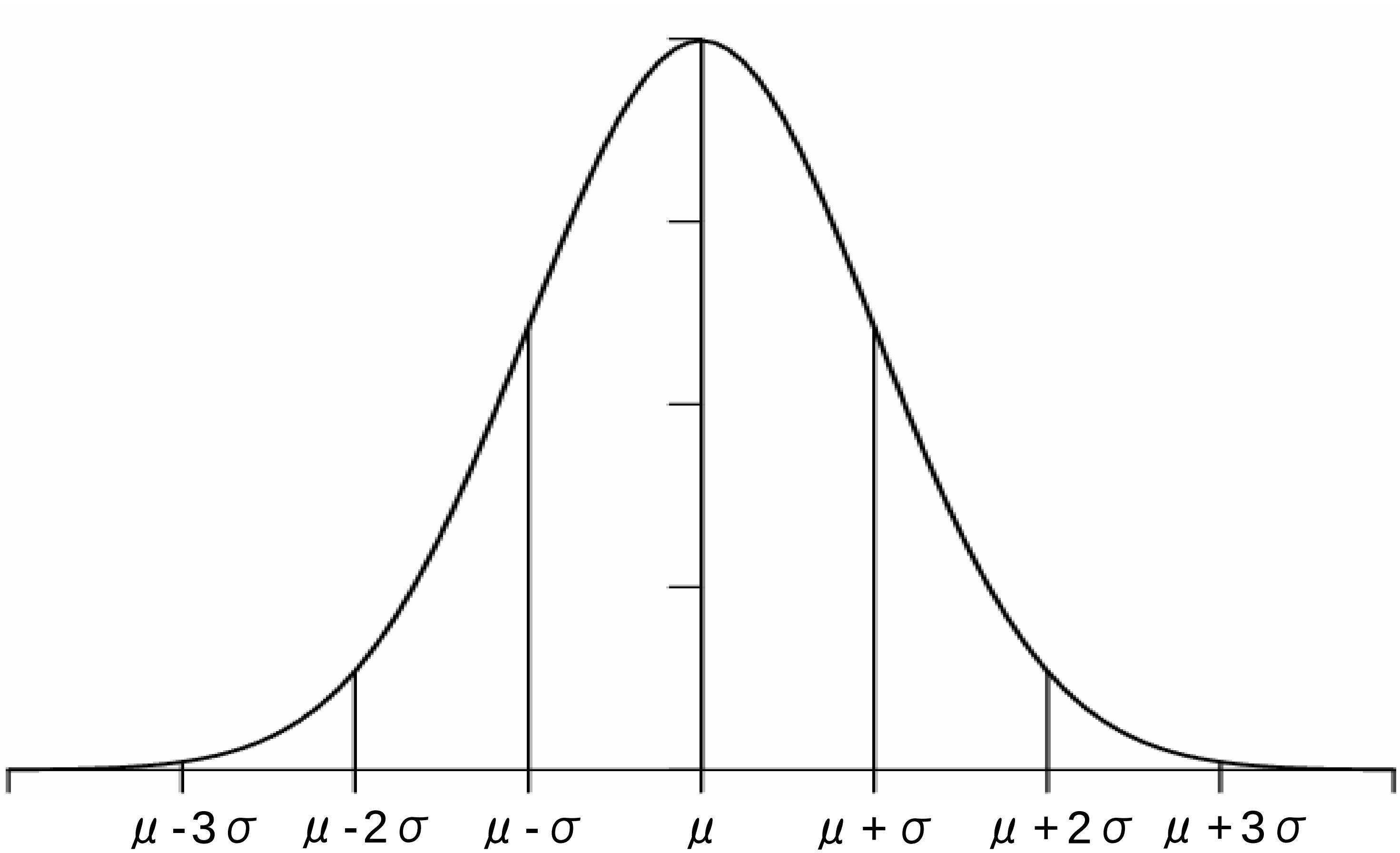
分散、標準偏差：散らばりの尺度



分散が大きくなると裾広がり

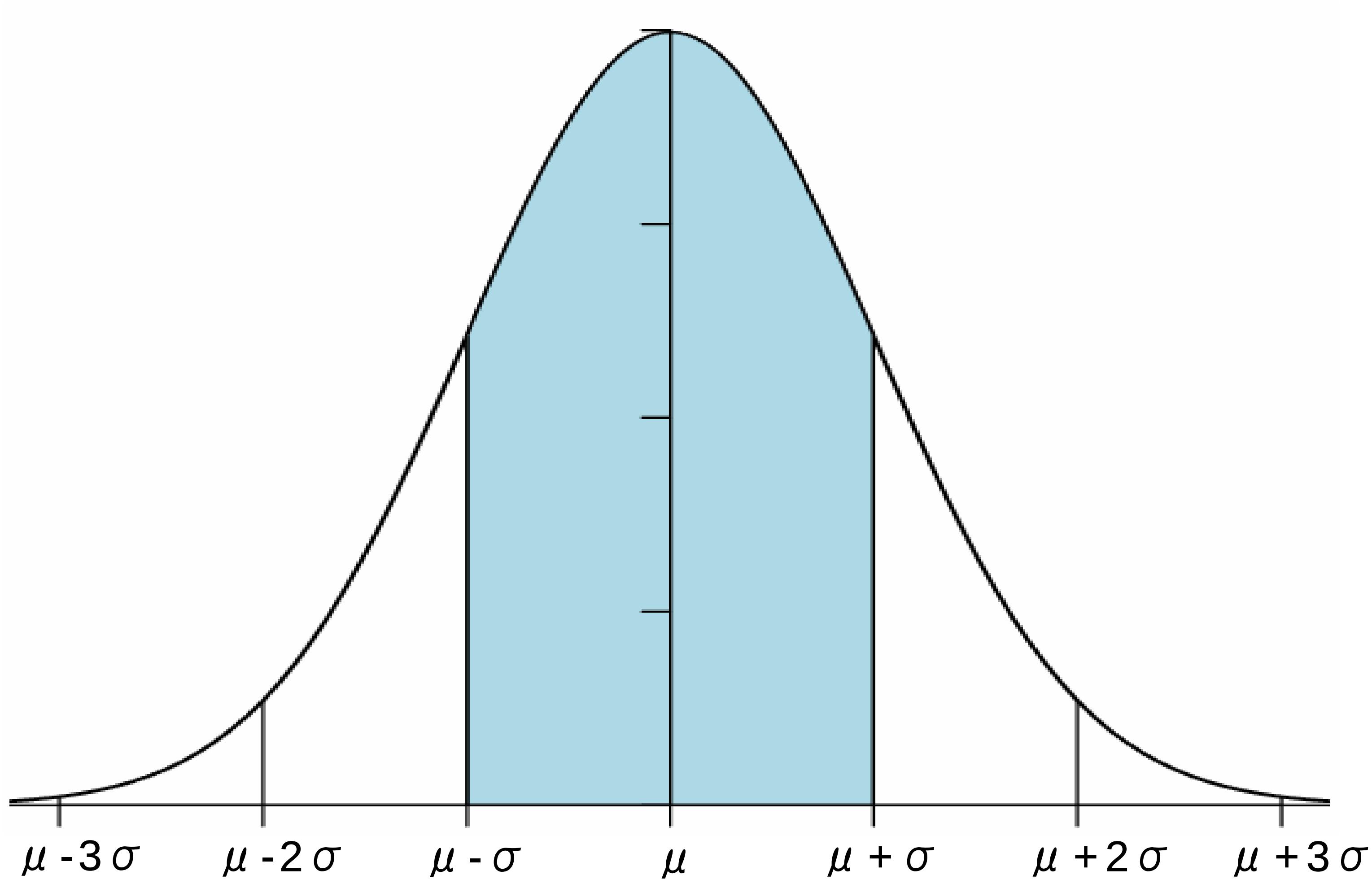
正規分布の性質

正規分布はμとσにより分布が定まる(母数)

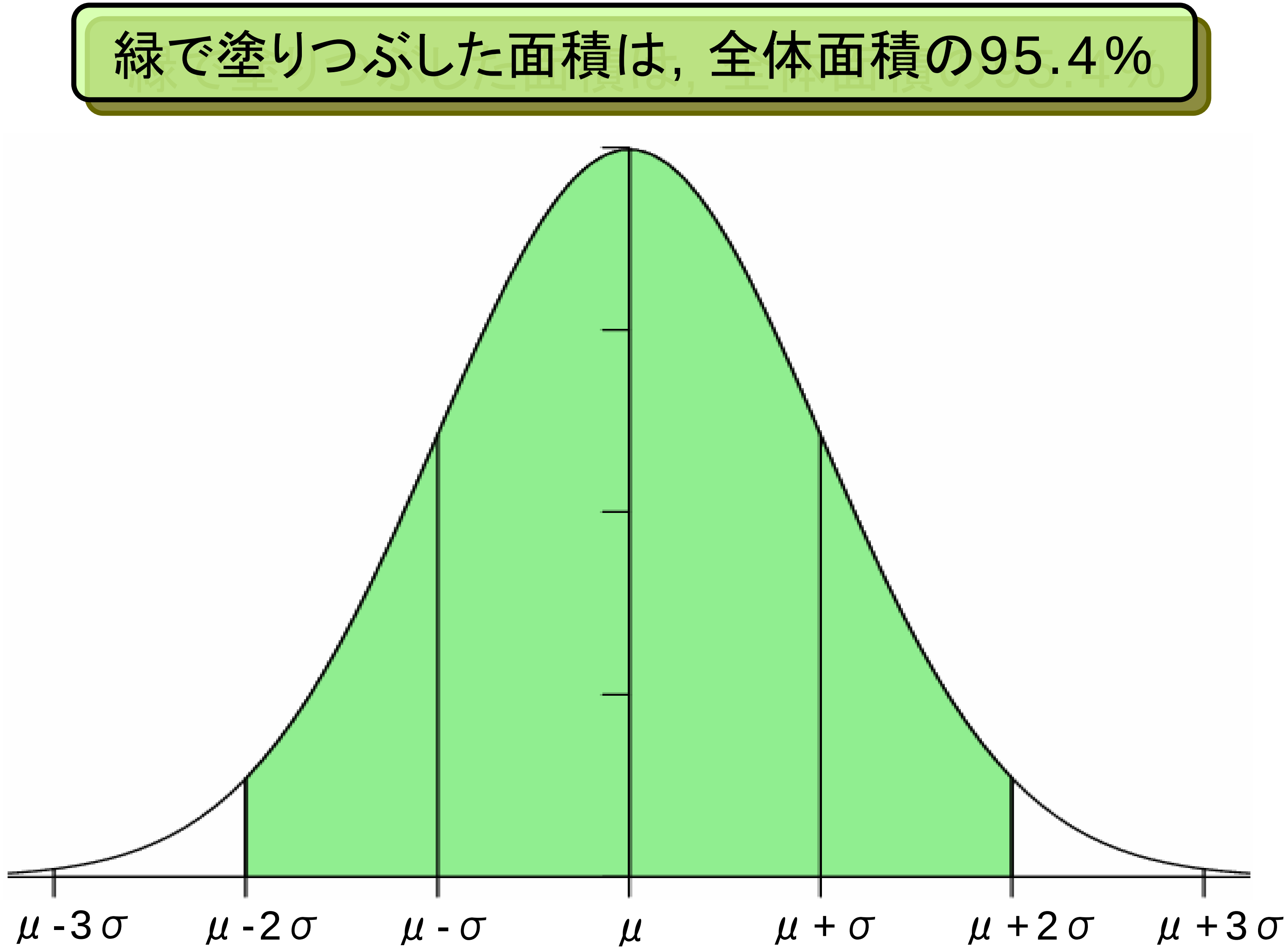


正規分布の密度曲線下の面積

青で塗りつぶした面積は，全体面積の68.3%

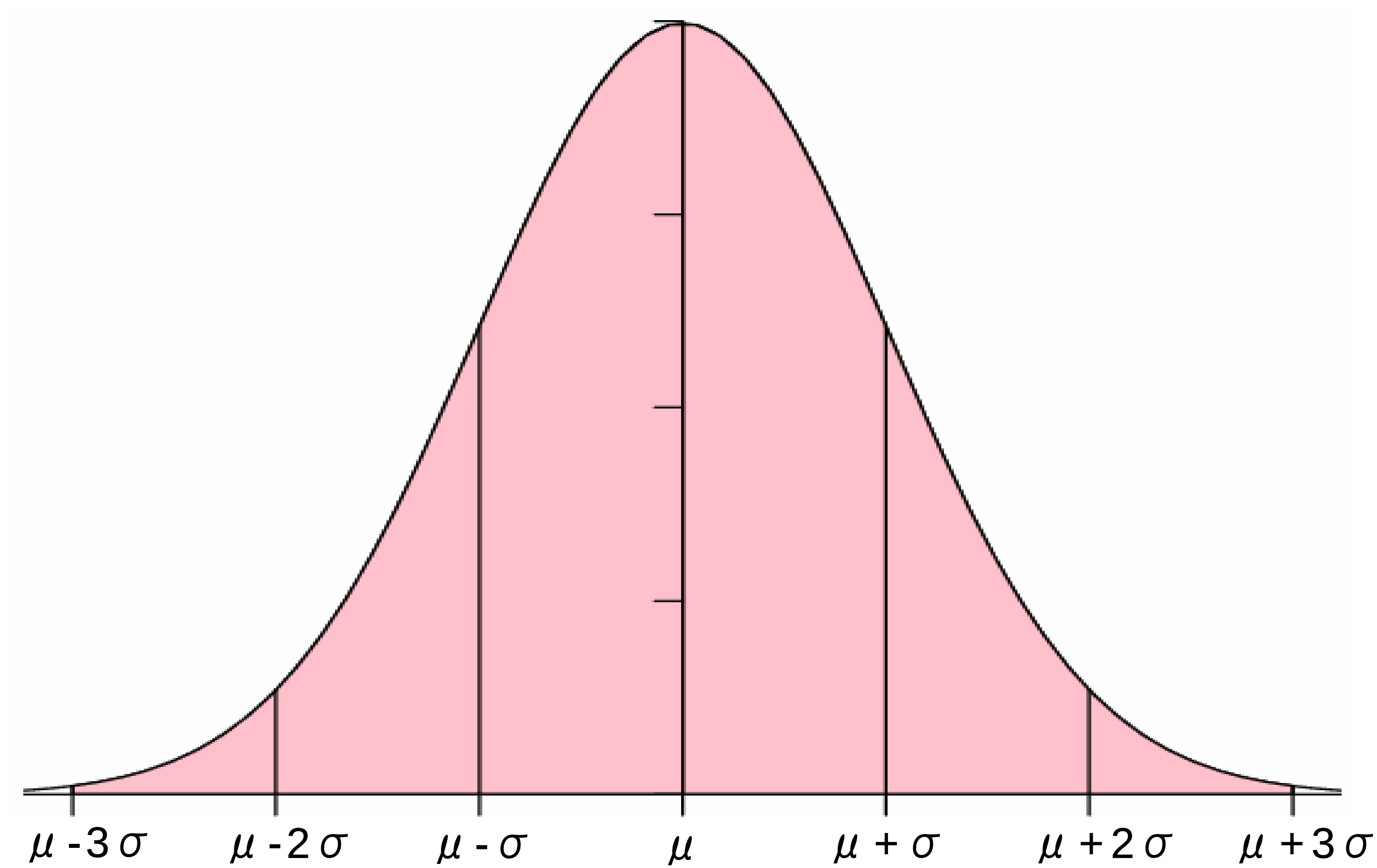


正規分布の密度曲線下の面積



正規分布の密度曲線下の面積

緑で塗りつぶした面積は，全体面積の99.7％



離散確率変数と連続確率変数

離散型確率変数

- 確率変数 x の各値に確率が対応している
  - 例：ある夫婦に女児の生れる人数x

連続型確率変数

- 確率変数 x が連続的に変化する（身長 等）
- ある1点の確率は 0

標準正規分布と基準化

標準正規分布

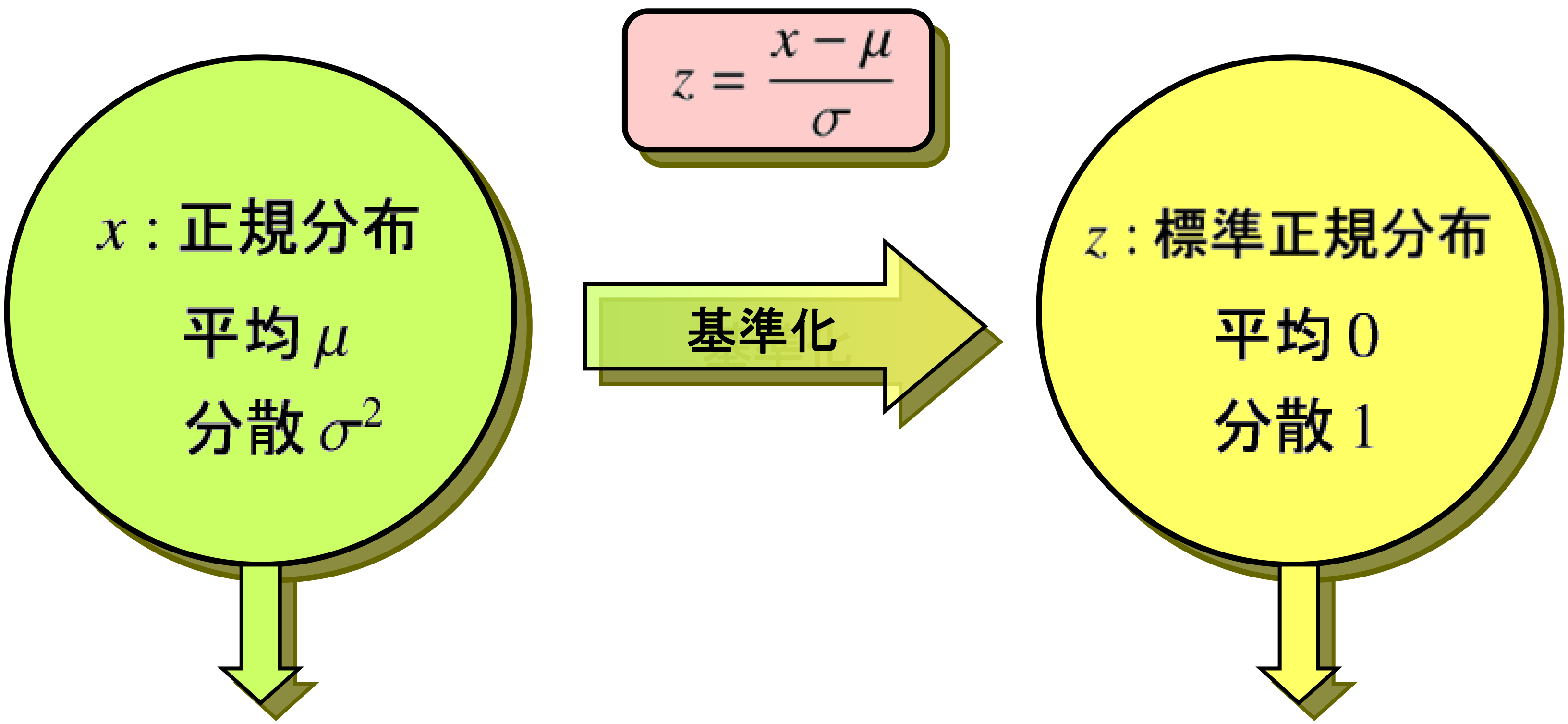
- 平均 $\mu = 0$, 分散 $\sigma^2 = 1$ の正規分布

- 基準化
  - 変量 x が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布にしたがうとき,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

とおくと, z は標準正規分布にしたがう

正規分布から標準正規分布への変換



標本

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

標本

$$\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}, \frac{x_2-\mu}{\sigma}, \ldots, \frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

例：標準正規分布への変換

18歳の女性の身長 x

- 平均 $\mu = 157.0$, 分散 $\sigma^2 = 5.0^2$ の正規分布にしたがう

標準正規分布への変換（基準化）

- 変数 x の値が 159.2 であったとする

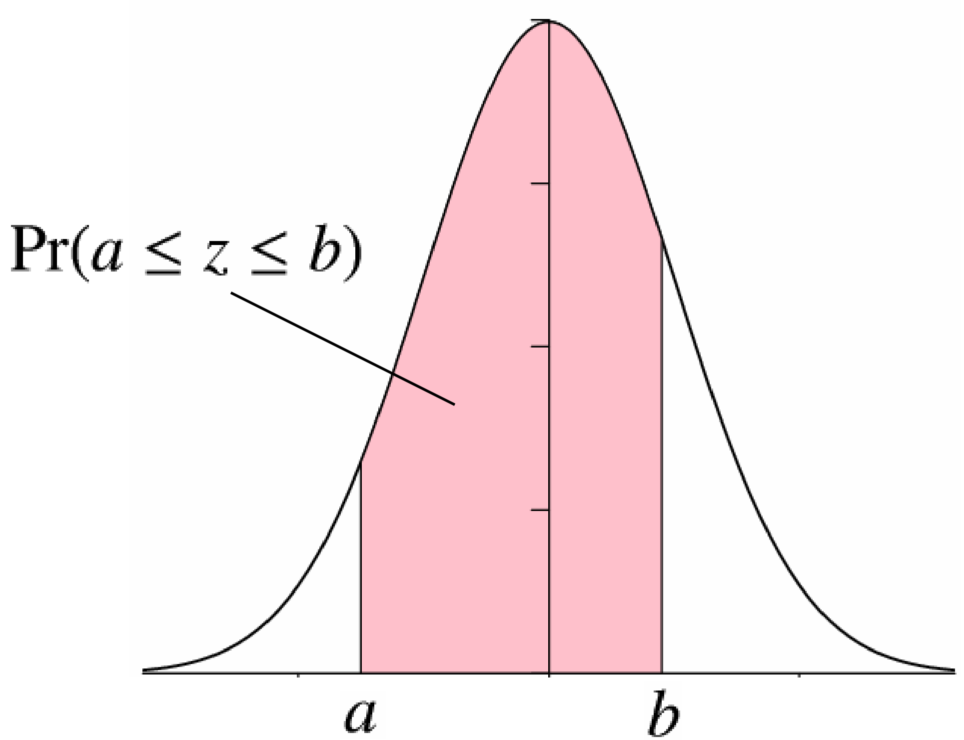
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{159.2 - 157.0}{5.0} = 0.44$$

標準正規分布の確率

標準正規分布の確率

標準正規分布の確率（ピンク色の部分の面積）

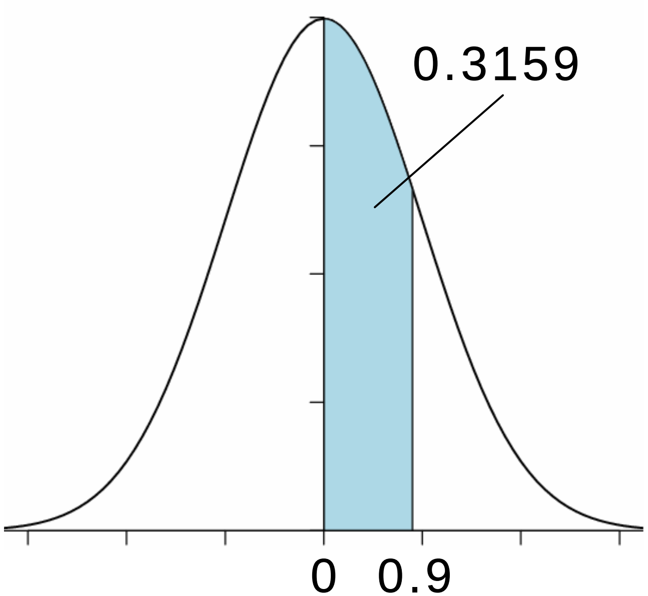
- 参考書等の付表から得られる.
- 統計パッケージの利用により得られる.

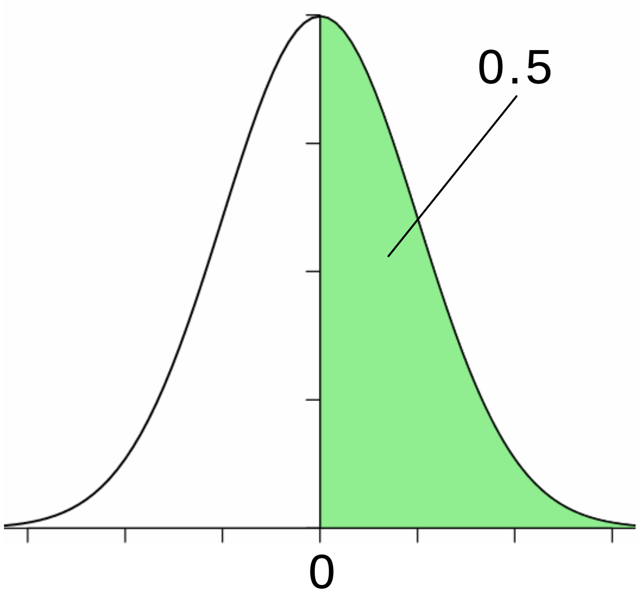


例１：標準正規分布の確率

標準正規分布の確率

- 下に示した確率は，統計パッケージ及び参考書等の付表より得られる

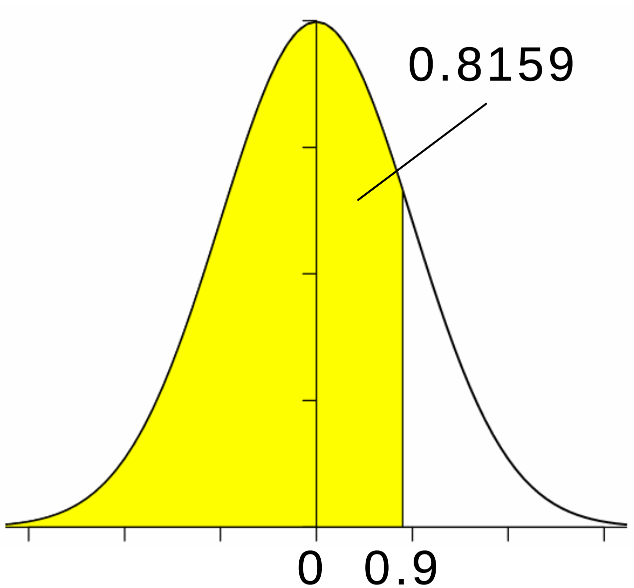


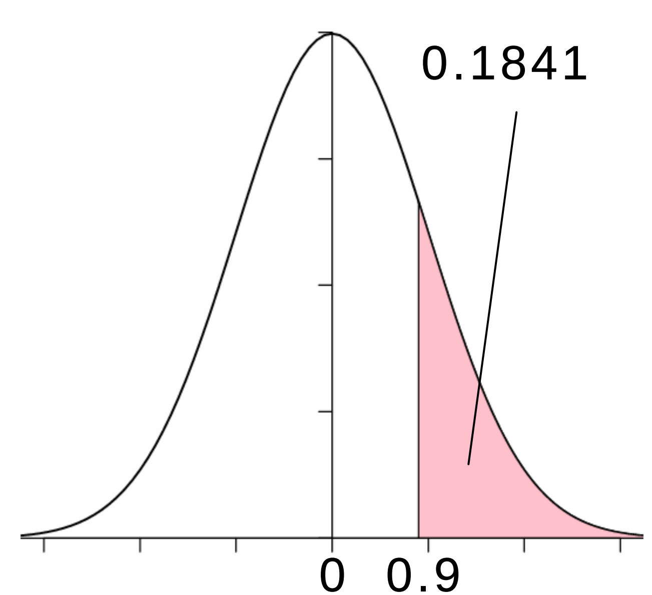


例2：標準正規分布の確率

標準正規分布の確率

- 下に示した確率は，統計パッケージ及び参考書等の付表より得られる

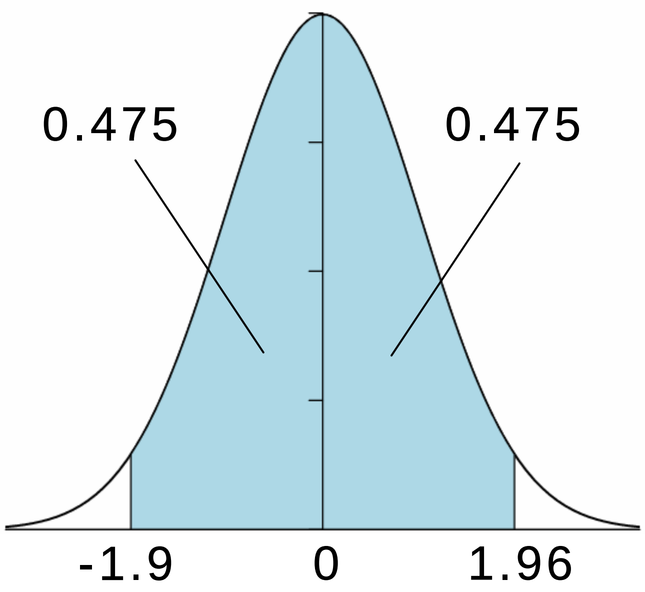


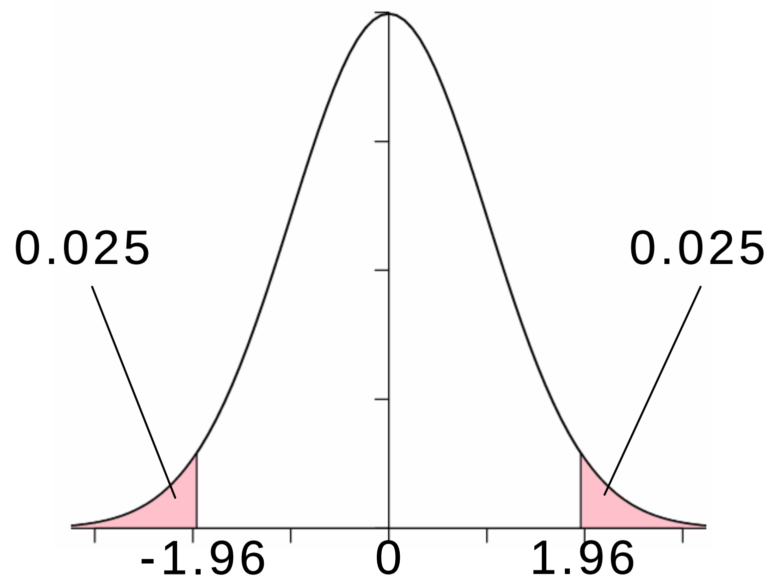


例3：標準正規分布の確率

標準正規分布の確率

- 下に示した確率は，統計パッケージ及び参考書等の付表より得られる



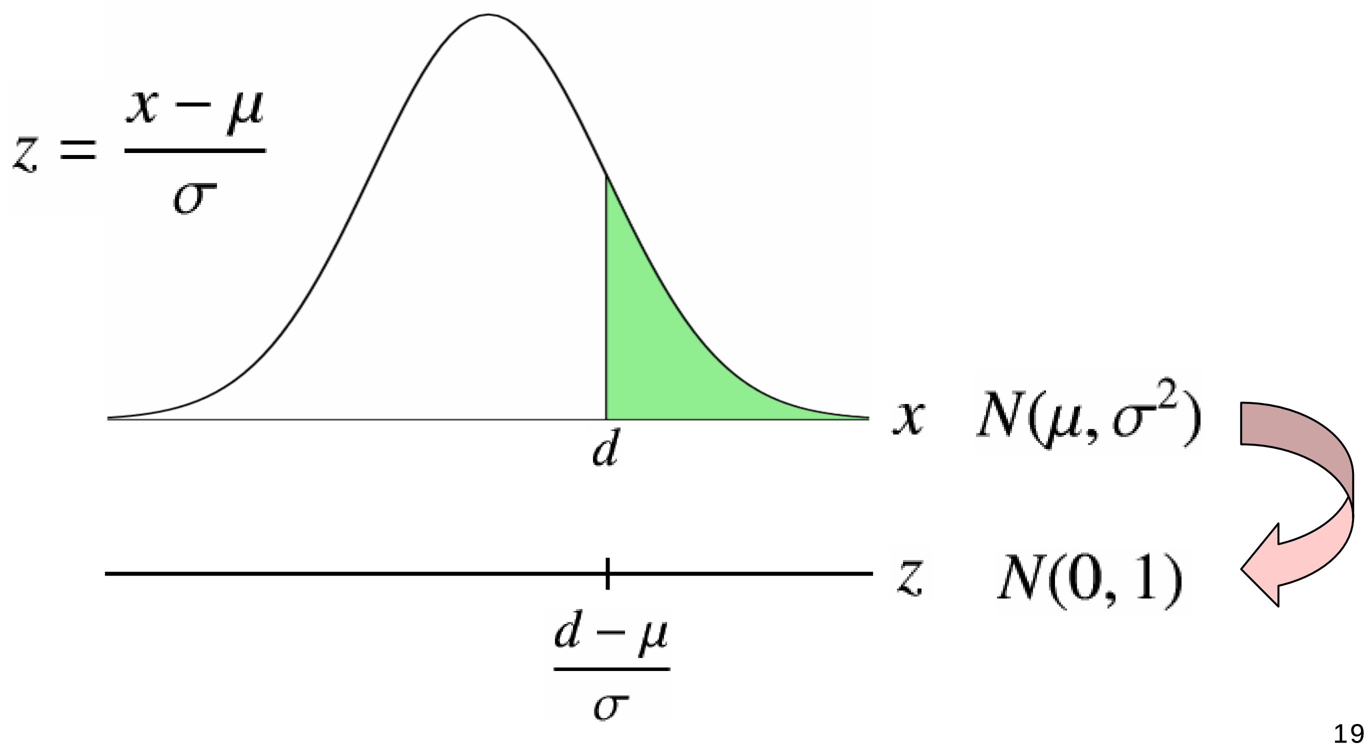


正規分布の確率

正規分布の確率

正規分布の確率の求め方

- 標準正規分布への変換から求める

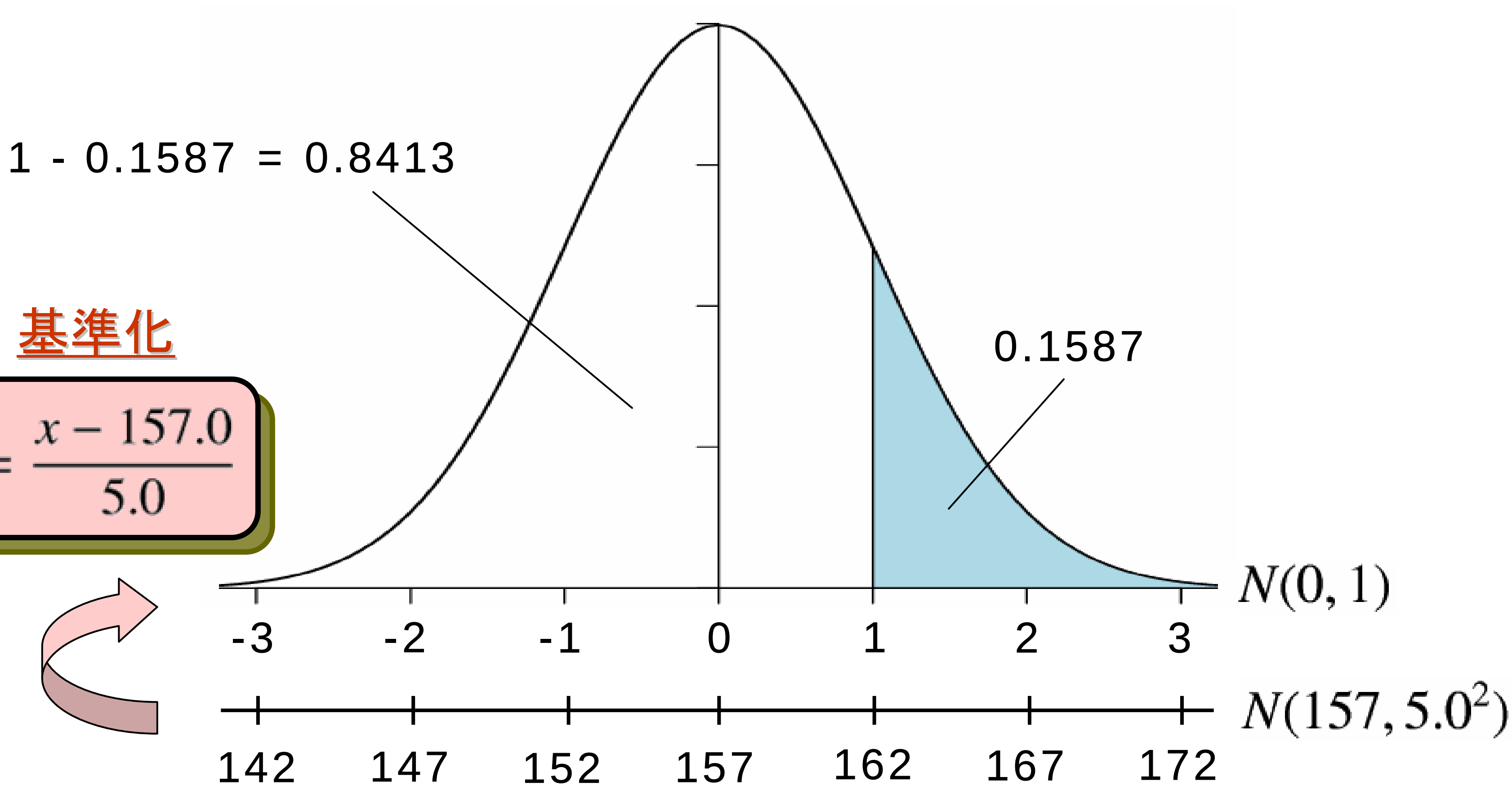


例：正規分布の確率

- 平均157.0，分散25の正規分布で，162以上の値をとる確率

基準化

$$z = \frac{x - 157.0}{5.0}$$



標本平均の分布

標本平均の分布

目的：今年の18歳の女性の身長の平均μを知る

- 方法1：全ての18歳の女性の身長を調査
  ⇒　不可能に近い
- 方法2：母集団から抽出した標本に基づいてμを推定
  ⇒　現実的な方法（標本平均による推定）

例：抽出する標本の大きさを5とする

- 標本：159，149，163，154，160
- 標本平均：

$$\bar{x} = \frac{159+149+163+154+160}{5} = 157$$

標本平均による母平均の推定

母集団

正規分布

18歳の日本人女性
全ての身長

母平均 μ

無作為抽出

標本

18歳の女性
n人の身長

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

<u>標本平均</u>

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

推定

<u>母平均 μ</u>

<u>抽出する標本によって，標本平均の値がばらつく</u>

標本平均の分布

実験：５人を無作為抽出し、身長の平均を求める

- １回目の実験の5人から平均を計算

  157.1，157.3，158.7，161.3，155.3

  標本平均 ＝ 157.9

- ２回目の実験の5人から平均を計算

  160.1，157.6，156.1，153.4，157.0

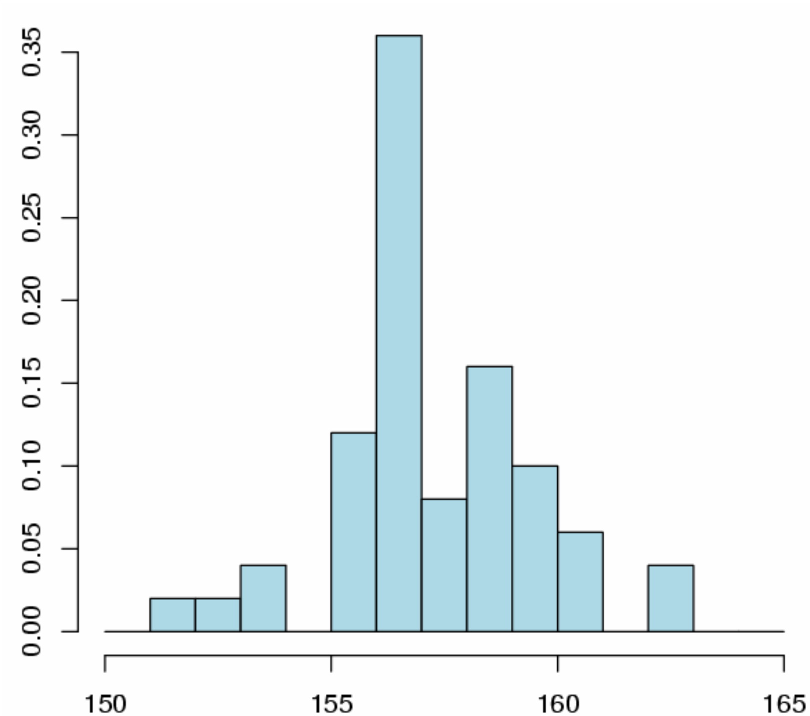
  標本平均 ＝ 156.8

⋮

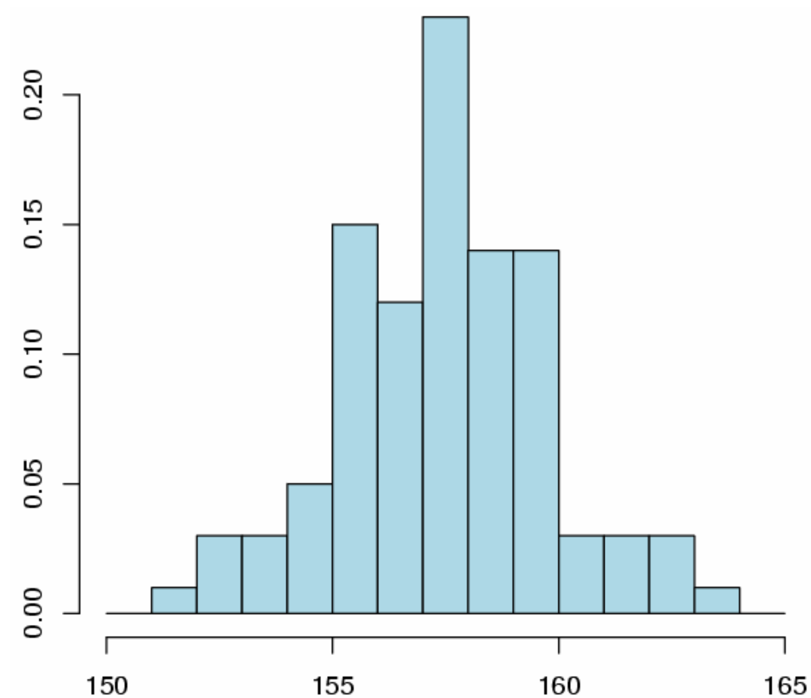
実験を繰り返し行い，ヒストグラムを描く
（標本平均の分布についての考察）

標本平均のヒストグラム

50回の抽出実験によるヒストグラム



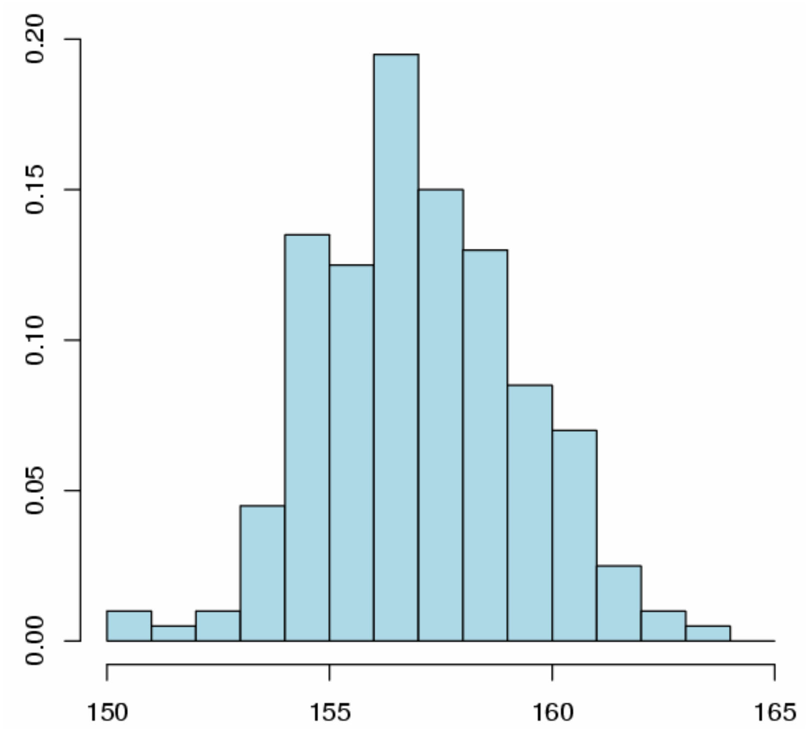
100回の抽出実験によるヒストグラム



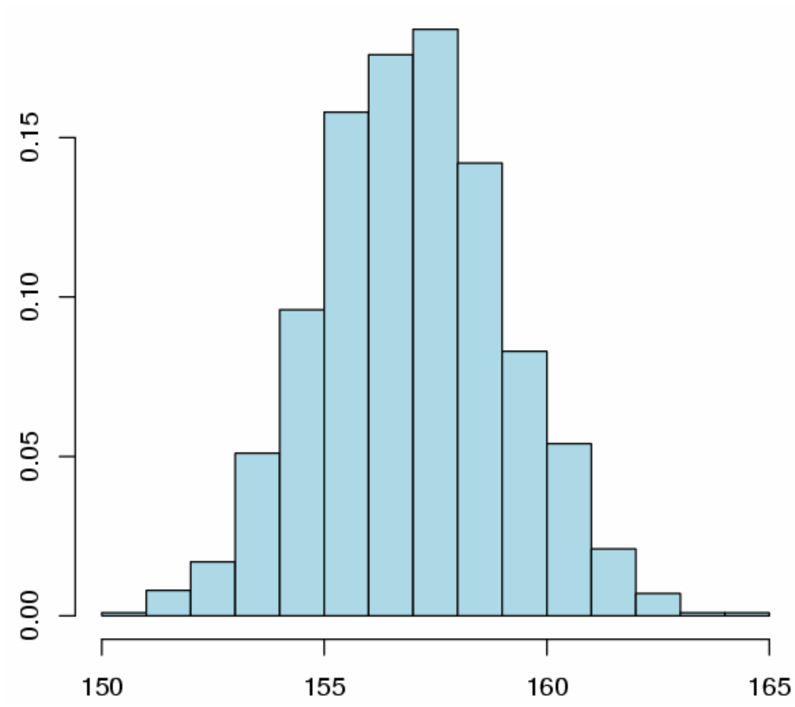
繰り返し回数が少ないと不安定

標本平均のヒストグラム

200回の抽出実験によるヒストグラム



1000回の抽出実験によるヒストグラム

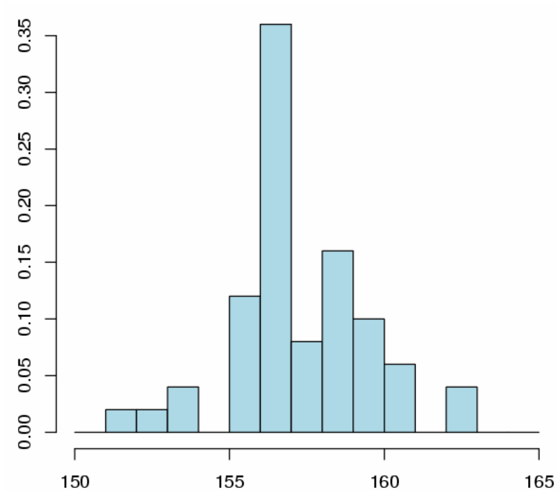


繰り返し回数が多くなるにつれ安定してくる

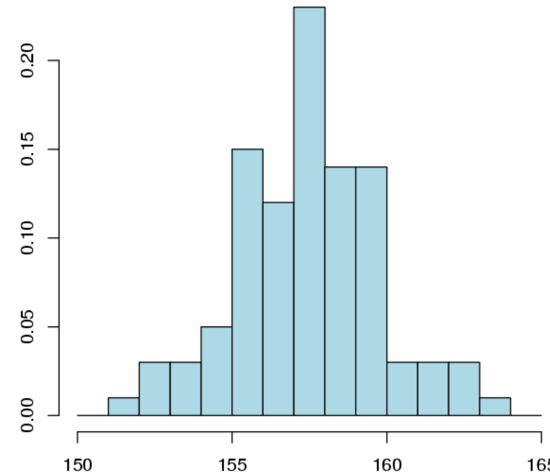
ある正規分布に近づく様子が見られる

標本平均のヒストグラム

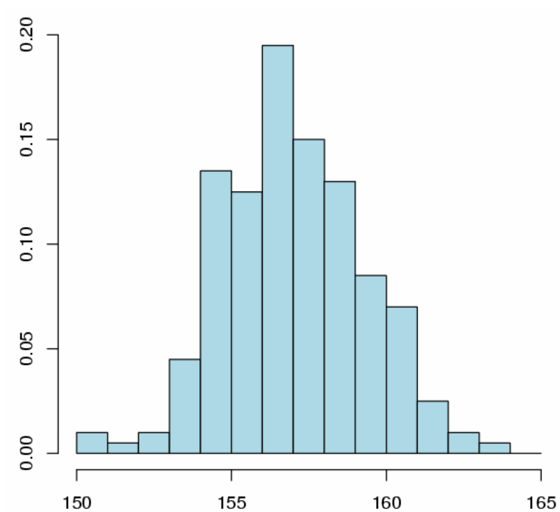
50回



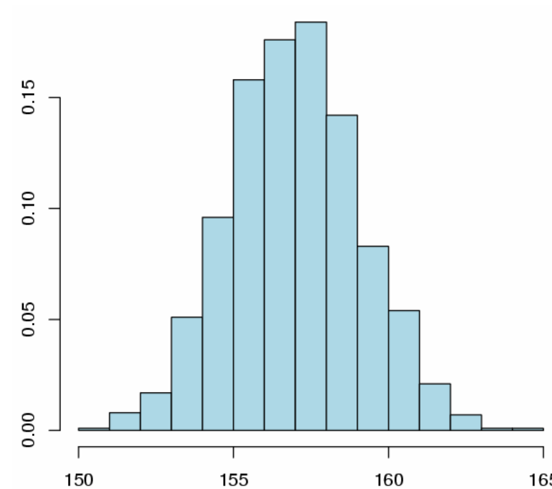
100回



200回



1000回



ある正規分布に近づく

標本平均の分布

平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布にしたがう母集団から抽出された大きさ n の標本にもとづく標本平均

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

の分布は,

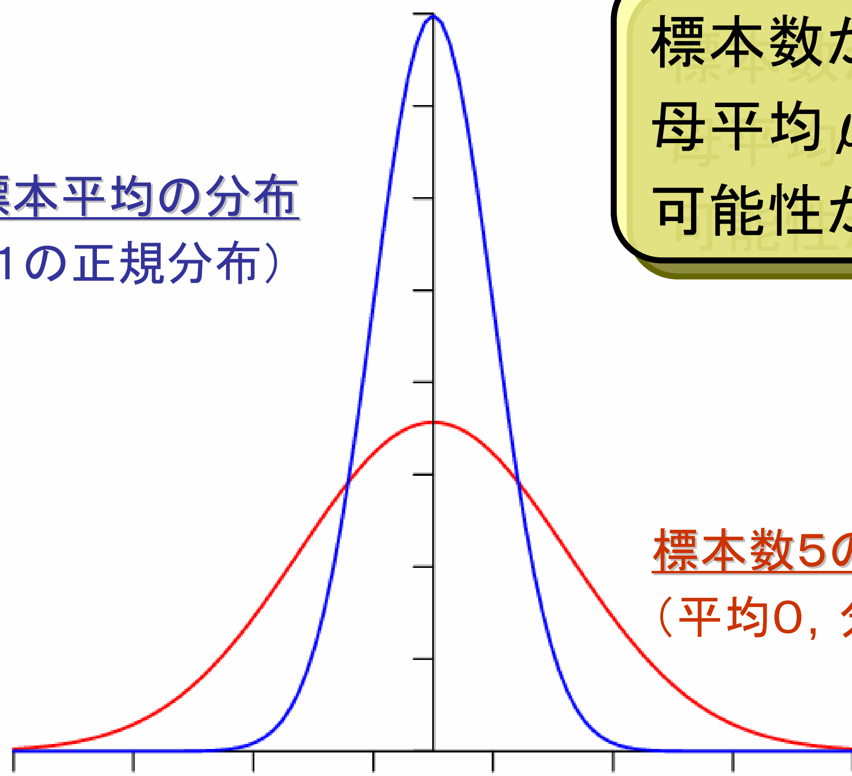
平均 μ, 分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布

にしたがう

標本の大きさと標本平均の分布

- 標本の大きさが5と25の場合の標本平均の分布
- 標本は平均0，分散25の正規分布から抽出

標本数25の標本平均の分布
（平均0，分散1の正規分布）



標本数が大きいほど、
母平均μに近い値をとる
可能性が大きくなる

標本数5の標本平均の分布
（平均0，分散5の正規分布）

標本平均の分布

変量 x が平均 μ，分散 σ^2 の分布にしたがう
（正規分布とはかぎらない）

⇩

大きさ n の標本平均

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

は，近似的に平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布にしたがい，
標本数 n が大きくなるにつれてこの近似も良くなる